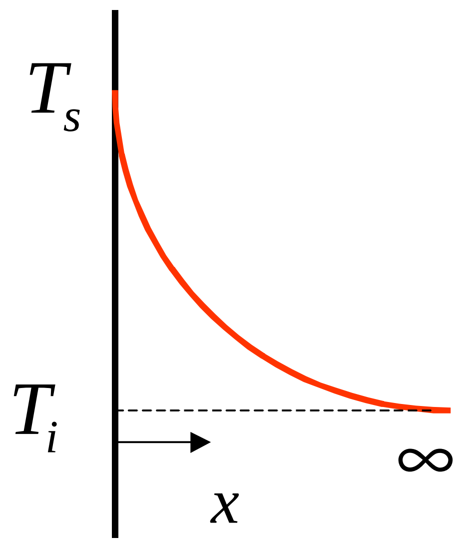
Sólido seminfinito

La solución de la distribución de temperaturas en un sólido seminfinito, es de gran ayuda para la determinación de la temperatura en sólidos finitos para tiempos pequeños. En el pasado habíamos comentado que la solución de sólidos finitos para tiempos pequeños, ($Fo << 0.2$) requería la evaluación de muchos términos de la serie, dado que la convergencia de la serie que determina la solución se dificulta en la medida que el tiempo sea más cercano a cero..

En términos físicos, cuando el tiempo es relativamente pequeño; la temperatura del cuerpo suficientemente alejada de la pared corresponde a la temperatura del cuerpo para el instante inicial, T_i, tal como se señala en la Figura, en la cual se observa un sólido seminfinito sometido a una temperatura superficial constante en la pared, T_S.



La formulación matemática de este problema viene dada por:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$
\begin{aligned}
T &= T_i \qquad t = 0 \\
T &= T_S \qquad x = 0 \\
T &= T_i \qquad x \to \infty
\end{aligned}
$$

La solución de este problema , puede ser obtenida analiticamente con la ayuda del siguiente cambio de variable;

$$\eta = \frac{x}{\sqrt{\alpha t}}$$

la cual determina que la ecuación en derivadas parciales original y sus condiciones iniciales y de frontera se conviertan en :

$$\frac{d^2T}{d\eta^2} = -\frac{\eta}{2}\frac{dT}{d\eta}$$

$$
\begin{aligned}
T &= T_i \qquad \eta = \infty \\
T &= T_S \qquad \eta = 0
\end{aligned}
$$

que como se observa corresponde a una ecuación diferencial ordinaria, donde la variable independiente es, η.

Si se introduce la nomenclatura, $T' = \frac{dT}{d\eta}$, la ecuación se puede rescribir despues de realizar separación de variables, como:

$$\frac{d(T')}{T'} = -\frac{\eta}{2}d\eta$$

que al integrar se obtiene:

$$\ln T' = -\frac{\eta^2}{4} + \ln c_1$$

que al despejar y devolver el cambio de variables, se tiene

$$\frac{dT}{d\eta} = C_1 \exp(-\frac{\eta^2}{4})$$

e integrando una vez más,

$$T = C_1 \int_0^{\eta} \exp\left(-\frac{\eta^2}{4}\right) d\eta + C_2$$

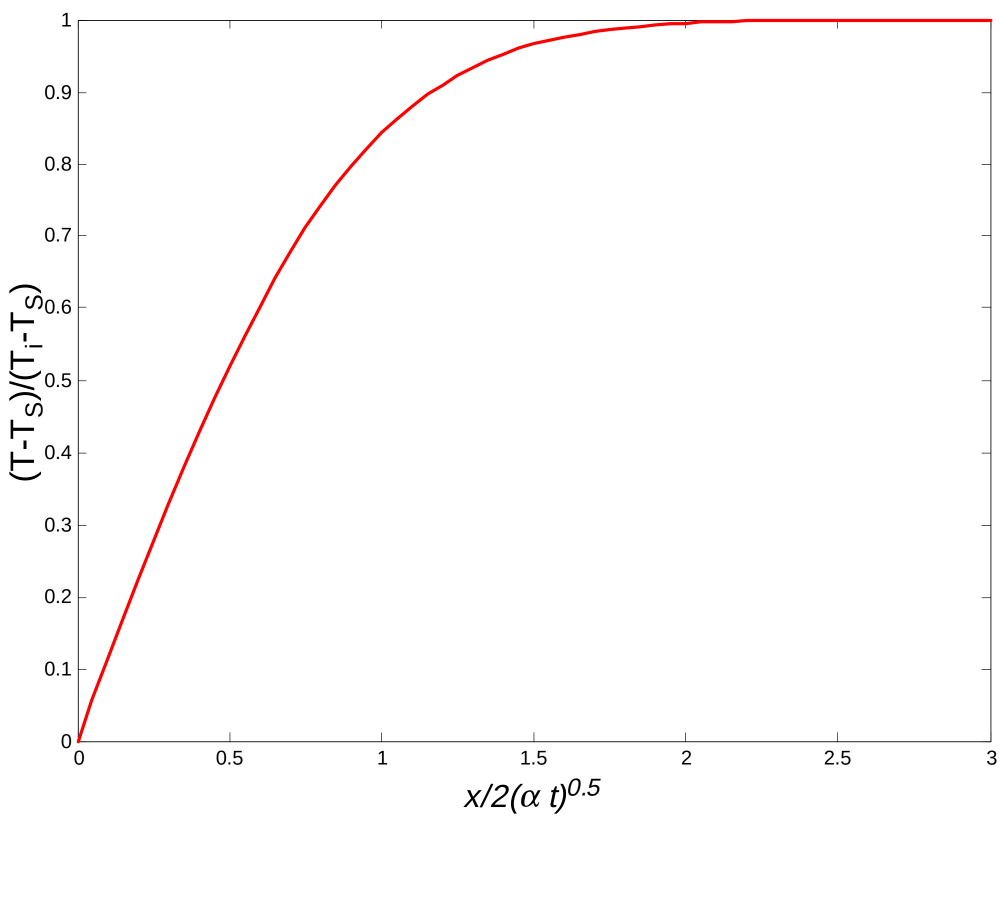
donde C_1 y C_2 pueden ser determinadas de las condiciones de contornos.

La solución anterior incluida el cálculo de las constantes puede ser expresada mediante la función error, como :

$$\frac{T - T_S}{T_i - T_S} = erf\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right)$$

donde la función error, es definida mediante:

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-m^2) dm$$



En la figura se muestra la solución, en ella se observa que para valores de

$$\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} = 2$$

La solución se hace prácticamente igual a la unidad, que en términos físicos corresponde a que la temperatura se asemeja a la temperatura inicial, T_i. Con esta observación se puede desarrollar un criterio para decidir cuando un sólido puede ser considerado como seminfinto, el cual se puede expresar mediante la siguiente desigualdad:

$$\frac{L}{2\sqrt{\alpha t}} > 2$$

Alternativamente, introduciendo la definición del número de Fourier, $Fo = \alpha t / L^2$, es posible reescribir el criterio como:

$$Fo < \frac{1}{16}$$

Que puede interpretarse como que la solución para tiempos pequeños se puede obtener mediante la correspondiente a un sólido seminfinito; si se cumple que el número de Fourier es inferior a 1/16.

La determinación del calor, en la pared del sólido puede ser determinado mediante la ley de Fourier:

$$q_S'' = -k \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = \frac{k(T_S - T_i)}{\sqrt{\pi \alpha t}}$$

Los casos de flujo de calor constante en la pared y ambiente convectivo pueden ser encontrados en la pag 239 del libro de Incropera.

Ejemplo. Una compañia de seguros lo contrata a Ud. como asesor para entender y saber más sobre las lesiones por quemaduras. Están interesados en especial por las lesiones inducidas cuando una parte del cuerpo de un trabajador llega a hacer contacto con maquinaria que está a temperaturas elevadas en el rango de $50\,°C$ a $100°C$. El asesor médico les informa que ocurrirá una lesión térmica irreversible en cualquier tejido vivo que se mantenga a $T \geq 48°C$

durante 10 s. Quieren informacón con respecto al grado de daño ireversible del tejido(medido por la distancia desde la superficie de la piel) como función de l a temperatura de la maquinaria y el tiempo duramte el cual se tiene contacto entre la piel y la maquinaria. Suponga que el tejido vivo tiene una temperatura normal de 37 $°C$, es isotrópico y tiene propiedades consantes equivalentes al agua líquida. (a) para evaluar la seriedad del problema, calcule lugares en el tejido en los que la temperatura alcanzará $48°C$.

Solución.

De la tabla A.6 $T = 37°C \approx 310K$

$\rho = \dfrac{1}{v_f} = 993{,}1\ kg/m^3$, $c = 4178\ J/kgK$, $k = 0{,}628 W/mK$

$\alpha = \dfrac{k}{\rho c} = 1.513 \cdot 10^{-7}\ m^2/s$

Caso #1

$$\frac{T - T_S}{T_i - T_S} = erf\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right)$$

para $T_S = 100\ °C$, solución gráfica (fig 5.8) $T_S \to T_\infty$, por tanto $h \to \infty$

$\dfrac{T - T_i}{T_\infty - T_i} = 0{,}1746$

con este valor se obtiene de la gráfica que $erf\left(\dfrac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) = 1.0$, lo que determina que:

$$x = 2{,}46 mm$$

Solución analitica:

$\dfrac{T - T_S}{T_i - T_S} = 0{,}825$

en la Tabla B.2 (B.3) erf(x)=0.825 $\Rightarrow w = 0.96 \quad x = 2{,}36 mm.$

de forma similar para $T_s = 50°C$ se obtiene por la vía analítica:

$$x = 0{,}34mm$$

Discretización para conducción transitoria

Caso 1-D estacionario

$$\frac{1}{r^n}\frac{d}{dr}(r^n k \frac{dT}{dr}) + S_p T + S_c = 0$$

Ecuación discretizada

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + b$$

1-D transitorio

$$\frac{1}{r^n}\frac{d}{dr}(r^n k \frac{dT}{dr}) + S_p T + S_c = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$$

La discretización del termino transitorio se realiza mediante el método implicito (método de Euler); el cual consiste en la derivada atrasada de la temperatura con respecto al tiempo.

$$\frac{\partial T}{\partial t} \approx \frac{T - T^0}{\Delta t}$$

que al sustituir en la ecuación 1-D transitorio se tiene:

$$\frac{1}{r^n}\frac{d}{dr}(r^n k \frac{dT}{dr}) + S_p T + S_c = \rho c \frac{T - T^0}{\Delta t}$$

Esta se puede reescribir como:

$$\frac{1}{r^n}\frac{d}{dr}(r^n k \frac{dT}{dr}) + S_p{}^* T + S_c{}^* = 0$$

donde ahora;

$$S_P{}^* = S_P - \frac{\rho c}{\Delta t}$$

$$S_c{}^* = S_c + \frac{\rho c}{\Delta t} T^0$$

Es decir con estas pequeñas modificaciones se puede incorporar el termino transitorio en un programa que resuelva problemas estacionarios.

Es importante destacar que cuando $\Delta t \rightarrow \infty$, la formulación coincide con la correspondiente a condiciones estacionarias.

Procedimiento

1. Dado T^0 (condición inicial) y Δt se calculan S_P^* y S_C^*
2. Se determinan los coeficientes de influencia (a's) y se resuelve el sistema de ecuaciones, para obtener así un nuevo campo de temperaturas
3. El nuevo campo de temperaturas pasará a ser T^0 y se regresa a **1.** Y se prosigue hasta alcanzar el tiempo deseado.

La aplicación de este procedimiento es idéntica para el caso de 2-D y 3-D.